

Mathematische Problembearbeitungsprozesse mit haptischen und digitalen Lernmedien im Vergleich

Anna Kinzl, Beatrix Hauer

Private Pädagogische Hochschule der Diözese Linz
beatrix.hauer@ph-linz.at; <https://doi.org/10.17883/pa-ho-2026-02-09>

EINGEREICHT 20 JAN 2026

ÜBERARBEITET 02 JUL 2026

ANGENOMMEN 16 JUL 2026

Das Problemlösen ist ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts und als prozess-bezogene Komponente in allen Themenbereichen relevant. Es ist sowohl im neuen österreichischen Lehrplan als auch in internationalen Vergleichsstudien wie PISA fest verankert. Die im vorliegenden Artikel präsentierte Studie untersucht Unterschiede zwischen haptischen und digitalen Lernsettings in der mathematischen Problembearbeitung von Lernenden der 7. Schulstufe. Dabei wird auf die Aspekte Art und Anzahl der Phasen des Problemlösens, Linearität, Hilfestellungen, Hürden und Problemlösestrategien, die sogenannten Heurismen, eingegangen. Die mittels Videografie dokumentierten Problembearbeitungsprozesse wurden qualitativ analysiert. Die Ergebnisse der qualitativen Studie zeigen, dass Problembearbeitungsprozesse in ihrer Anzahl und Reihenfolge der Phasen unabhängig vom haptischen oder digitalen Setting stark variieren. Außerdem verlaufen drei Viertel der Prozesse nicht linear, was vor allem auf das Anbieten von Hilfestellungen zurückzuführen ist. Die Hilfestellungen werden im digitalen Setting öfter genutzt und führen zu häufigeren Verifikationsphasen, die für den Problemlöseerfolg essenziell sind. Beim Einsatz von Heurismen zeigen sich folgende Unterschiede: Im haptischen Setting werden insgesamt mehr Heurismen verwendet. Die Strategien Messen und Transformationsprinzip sind charakteristisch für dieses Setting. Diese Ergebnisse zeigen, dass sich neben dem digitalen Setting auch das haptische Setting gut eignet, um Probleme zu bearbeiten. Aufbauend auf einer Masterarbeit fasst dieser Artikel die wichtigsten Ergebnisse der im Rahmen der Studie erzielten Erkenntnisse zusammen.

SCHLÜSSELWÖRTER: Problemlösekompetenz, Problemlöseprozesse, haptische und digitale Lernmedien

1. Einleitung und Fragestellung

In der aktuellen Forschung herrscht sowohl auf nationaler als auch auf internationaler Ebene weitgehende Einigkeit darüber, dass der Erwerb grundlegender Problemlösefähigkeiten für Lernende von großer Bedeutung ist (Rott, Bruder, Heinrich, Bauer, 2023, S. 315). Auch österreichische Lehrpläne der Primar- und Sekundarstufe betonen die Notwendigkeit, dass Lernende Problemlösestrategien,

sogenannte Heurismen, entwickeln, um inner- und außermathematische Probleme erfolgreich bearbeiten zu können (Pädagogik-Paket, 2026). Die internationale Vergleichsstudie PISA stellt ebenfalls das Problemlösen in den Vordergrund und betrachtet es als zentrale Kompetenz für die gesellschaftliche Teilhabe im 21. Jahrhundert (Kipman, 2020, S. 10–11; Stiller, Krichel & Schwarz, 2021, S. 179).

Die Literatur zeigt zudem Konsens darüber, dass Differenzierung während des Problemlöseprozesses notwendig ist, und liefert zahlreiche praktische Ansätze für deren Umsetzung (Bruder & Collet, 2011, S. 13; Holzäpfel, Lacher, Leuders & Rott, 2018, S. 65–67).

Der vorliegende Artikel greift Ergebnisse, die in einer Masterarbeit zum Thema „Differenzierte mathematische Problembearbeitungsprozesse in der 7. Schulstufe – Ein Vergleich von haptischen und digitalen Lernmedien“ erarbeitet wurden, auf und präsentiert ausgewählte zentrale Erkenntnisse. Ziel ist es, die Potenziale digitaler und haptischer Medien im Geometrieunterricht zu vergleichen und aufzuzeigen, wie der Medientyp den Problembearbeitungsprozess beeinflussen kann. Beide Medientypen besitzen wertvolle Stärken: Digitale Werkzeuge wie GeoGebra fördern interaktives Erkunden und die Entwicklung heuristischer Strategien (Jacinto & Carreira, 2023, S. 105; Reinhold, Walter & Weigand, 2023, S. 524; Tamam & Dasari, 2021, S. 5), während haptische Materialien abstrakte mathematische Konzepte greifbar machen und daher im Geometrieunterricht besonders gewinnbringend sind (Cabrera & Colosi, 2010, S. 36; Crandall & Karadoğan, 2021, S. 1; Vollrath & Roth, 2012, S. 145–155).

Ausgangspunkt ist die folgende Forschungsfrage: „Wie unterscheiden sich die mathematischen Problembearbeitungsprozesse von Lernenden in der 7. Schulstufe bei der Nutzung von haptischen im Vergleich zu digitalen Lernmaterialien?“ Im Fokus der Analyse stehen dabei mehrere Aspekte: die Anzahl und Art der durchlaufenen Phasen, die Linearität des Bearbeitungsprozesses, der Umgang mit Hilfestellungen, das Auftreten von Hürden sowie der Einsatz von Heurismen im Problembearbeitungsprozess. Ziel ist es, diese Merkmale systematisch zu untersuchen und das digitale dem haptischen Setting kontrastiv gegenüberzustellen.

Zu Beginn dieses Artikels werden theoretische Grundlagen zum Problemlösen erläutert. Der Fokus liegt dann auf der empirischen Untersuchung. Dazu wird zuerst die untersuchte Problemstellung erklärt, anschließend werden die Ergebnisse in Bezug auf die unterschiedlichen Aspekte präsentiert.

2. Theoretische Grundlagen

Dieses Kapitel erläutert die theoretischen Grundlagen des Problemlösens im mathematischen Kontext. Zunächst werden die Begriffe Problem und Problemlösekompetenz definiert sowie zentrale Einflussfaktoren auf das Problemlösen dargestellt. Anschließend wird mit dem Modell von Rott (2014) die Struktur eines

Problembearbeitungsprozesses beschrieben, um typische Phasen und deren Bedeutung nachvollziehbar zu machen.

2.1 Definition Problem

Ein Problem liegt vor, wenn ein Ziel erreicht werden soll, der Lösungsweg jedoch unbekannt ist. Gegeben ist also ein Ausgangszustand, der in einen gewünschten Zielzustand übergeführt werden soll. Zwischen den beiden Zuständen gibt es jedoch eine Barriere (Hussy, 1984, S. 114). Um diese Barriere zu überwinden, sind kreative Verknüpfungen vorhandenen Wissens, aktives Denken und das Ausprobieren verschiedener Strategien erforderlich (BIFIE, 2013, S. 8; Büchter & Leuders, 2020, S. 28). In der Mathematikdidaktik wird der Begriff des Problems streng von einer (Routine-)Aufgabe abgegrenzt. Ein Problem erfordert die Neukombination von Wissen, um die Barriere zu überwinden. Es fordert somit produktives Arbeiten. Eine Aufgabe hingegen lässt sich mithilfe bereits bekannter Verfahren lösen und ist daher durch ein eher reproduktives Handeln gekennzeichnet (BIFIE, 2013, S. 5; Schoenfeld, 1983, S. 41). Ob eine Anforderung als Problemlöseaufgabe oder eine Routineaufgabe wahrgenommen wird, ist sehr individuell und hängt vom Vorwissen der Lernenden ab (Holzäpfel et al., 2018, S. 87).

2.2 Problemlösekompetenz

Problemlösekompetenz ist ein zentraler Bestandteil des allgemeinen Kompetenzbegriffs. So definiert Weinert (2001, S. 27) die Kompetenz als erlernbare Fähigkeit, die es Individuen ermöglicht, erfolgreich Probleme zu lösen.

Problemlösekompetenz umfasst drei zentrale Aspekte: die individuelle Fähigkeit, Problemstellungen zu verstehen, deren Lösung nicht unmittelbar ersichtlich ist; die Fähigkeit, trotz auftretender Hindernisse eine Lösung zu finden, wobei vorhandenes Wissen neu geordnet oder ergänzt werden muss; und die Motivation, sich aktiv mit der Aufgabe auseinanderzusetzen, eigene Ideen einzubringen und Ausdauer zu zeigen (OECD, 2013, S. 122–123).

Schoenfeld (1985, S. 7) nennt die vier Bereiche Ressourcen, Heurismen, Kontrolle und Beliefs als entscheidende Komponenten erfolgreichen Problemlösens. Ressourcen, insbesondere das verfügbare mathematische Wissen in Form von Fakten, Verfahren und Fertigkeiten, sind entscheidend für die Problemlösekompetenz, da sie den Zugang zu Lösungen ermöglichen, den Schwierigkeitsgrad beeinflussen und gleichzeitig die Fähigkeit erfordern, neues Wissen zu erwerben oder vorhandenes Wissen neu zu organisieren (Holzäpfel et al., 2018, S. 87; Schoenfeld, 1985, S. 17). Problemlösestrategien, sogenannte Heurismen, sind flexible, kognitive Strategien, Methoden oder Werkzeuge, die das Verstehen und Lösen von Problemen unterstützen, ohne einen sicheren Lösungsweg vorzugeben (Pólya, 1945; Schoenfeld,

1985). Der gezielte Einsatz von Heurismen ist lehr- und lernbar und verbessert die Problemlösekompetenz, insbesondere wenn Strategien bewusst angewendet und reflektiert werden. Erfolgreiche Problemlöser:innen wählen effektive Heurismen effizient und autonom, das bedeutet, dass sie geeignete Strategien selbstständig erkennen, zielgerichtet einsetzen und flexibel an die Anforderungen der jeweiligen Problemsituation anpassen, während weniger erfahrene Lernende oft Schwierigkeiten haben, die passende Strategie für neue oder ungewohnte Probleme zu identifizieren (Chi, 2006, S. 24; Holzäpfel et al., 2018, S. 152; Rott, 2012, S. 3–4).

Unter Kontrolle, auch bekannt unter Selbstregulation oder Steuerung, versteht man die Fähigkeit, den eigenen Denkprozess zu planen und zu steuern, etwa sich zu fragen: „Bin ich noch auf dem richtigen Weg?“ (Schoenfeld, 1985, S. 27). Die Kontrolle ist ein wichtiger Erfolgsfaktor beim Problemlösen. Die Hauptkomponenten für den Erfolg sind regelmäßige Monitoring- und Beurteilungsvorgänge (Schoenfeld, 1985, S. 33). Als vierte Komponente werden die Beliefs und Einstellungen genannt. Einstellungen umfassen Motivation, Haltungen (attitudes) und Überzeugungen (beliefs) und beeinflussen das mathematische Handeln indirekt. Eine typische Überzeugung gegenüber der Mathematik ist: „Ein Problem hat immer eine Lösung.“ Hier wird die Mathematik als ein starres Regelsystem mit eindeutigen Lösungen wahrgenommen, was das Problemlösen erschweren kann (Schoenfeld, 1992, S. 358–360). Lehrende können die Einstellungen der Lernenden gezielt beeinflussen, indem Problemlösen thematisiert und Durchhaltevermögen unterstützt wird sowie kreative Lösungswege gefördert werden (Rott, 2020, S. 918–920).

2.3 Struktur eines Problembearbeitungsprozesses

Für das Darstellen eines Problembearbeitungsprozesses hat Rott (2014) ein deskriptives Modell entwickelt, das es ermöglicht, Problembearbeitungsprozesse individuell abzubilden. Das Modell umfasst fünf Phasen: Die Analysephase ist ein strukturierter Versuch, das gegebene Problem zu verstehen. Dies kann durch Umformulieren oder Vereinfachen gelingen. Die Explorationsphase ist, im Gegensatz zur Analysephase, ein eher unstrukturiertes Erkunden des Problems. Hier werden häufig heuristische Strategien angewandt und neue Ideen ausprobiert. Die Planungs- und Implementierungsphase werden oft gemeinsam betrachtet, die Planung umfasst dabei das (oft implizite) Ausdenken eines Lösungsplans und die Implementierung beschreibt dessen Umsetzung, wobei Ausnahmen möglich sind. Die Verifikation ist die abschließende Überprüfung der Lösung und die Reflexion über den gesamten Problembearbeitungsprozess. Rott (2014) misst dieser Phase eine große Bedeutung für den Erfolg bei.

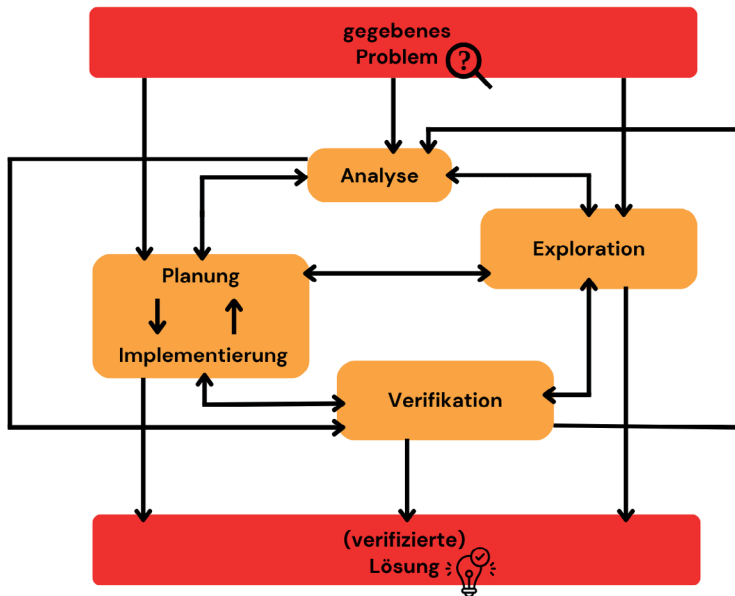


ABB. 1 Phasenmodell von Rott (2014) zitiert nach Kinzl, 2025, S.31

Das Modell (siehe Abbildung 1) zeichnet sich dadurch aus, dass Phasen flexibel mehrfach durchlaufen oder ausgelassen werden können, wodurch es den realen, individuellen Problembearbeitungsprozess realistisch abbildet. Im Gegensatz zu anderen Modellen kann dieses Modell sowohl lineare als auch nicht-lineare Prozesse abbilden. Unter der Linearität bei mathematischen Problembearbeitungsprozessen versteht man die feste Abfolge der inhaltsspezifischen Phasen *Analyse* → *Exploration* → *Planung* → *Implementierung* → *Verifikation*. Auch wenn einzelne Schritte ausgelassen werden können, bleibt der Prozess linear, solange die Reihenfolge gewahrt ist (Rott, 2014, S. 271).

Bei den Phasen handelt es sich nur um die inhaltsspezifischen Phasen. Diese werden noch durch weitere Phasen (Lesen, Abschwefeln, Schreiben, Organisation, Übergang, Sonstiges) ergänzt (Rott, 2013, S. 198).

3. Empirischer Teil

Im folgenden Abschnitt werden das Untersuchungsdesign, die Problemstellung sowie zentrale Ergebnisse der empirischen Untersuchung dargestellt. Ziel ist es, mathematische Problembearbeitungsprozesse von Lernenden der 7. Schulstufe zu analysieren und Unterschiede zwischen einem haptischen und einem digitalen Setting aufzuzeigen. Anschließend werden ausgewählte Ergebnisse zu Prozessverläufen, Hilfestellungen, Hürden und dem Einsatz von Heuristiken erläutert.

3.1 Untersuchungsdesign

Im Folgenden wird das Untersuchungsdesign beschrieben. Dazu wird auf die Stichprobe und das Sampling, auf das Erhebungsinstrument und die Datenauswertung eingegangen.

3.1.1 Stichprobe und Sampling

Um die mathematischen Problembearbeitungsprozesse von Lernenden der 7. Schulstufe zu untersuchen, wurden Schüler:innen aus zwei Klassen einer Mittelschule in Oberösterreich in haptisch und digital agierende Vergleichsgruppen eingeteilt. Die Auswahl der Klassen erfolgte im Sinne einer Gelegenheitsstichprobe, da die untersuchten Klassen von der Verfasserin selbst unterrichtet wurden. Innerhalb der Klasse wurden die Lernenden zunächst in Zweiergruppen sowie eine Dreiergruppe pro Klasse eingeteilt. Anschließend erfolgte die willkürliche Zuteilung der Kleingruppen zu einem haptischen oder digitalen Setting, sodass beide Bedingungen in vergleichbarer Anzahl vertreten waren. Der Samplebeschreibung in Tabelle 1 ist die Anzahl der Gruppen und Schüler:innen zu entnehmen.

Haptisch agierende Gruppe	Digital agierende Gruppe
4 Gruppen (8 Schüler:innen)	5 Gruppen (11 Schüler:innen)
4 Gruppen (8 Schüler:innen)	3 Gruppen (7 Schüler:innen)

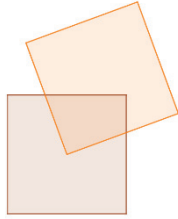
TAB. 1 Samplebeschreibung des Untersuchungsdesigns (Kinzl, 2025, S. 47)

3.1.2 Durchführungsbeschreibung

Die Durchführung fand jeweils in einem separaten Raum statt, um möglichst Ablenkungen und Störungen zu vermeiden. Dazu wurde eine einzige vorgegebene Problemstellung mit Hilfe von haptischen bzw. digitalen Hilfsmitteln von den Schüler:innen bearbeitet. Während der Bearbeitung war die Lehrkraft als beobachtende Person anwesend, um die Technik zu kontrollieren und Beobachtungsnotizen zu machen. Pro Gruppe standen ungefähr 30 Minuten zur Verfügung. Um ein kommunikatives Setting zu kreieren, wurde jeweils nur ein haptisches Materialpaket beziehungsweise ein Tablet pro Gruppe zur Verfügung gestellt.

3.1.3 Erhebungsinstrument und Problemstellung

Die Problemlöseprozesse wurden mittels eines geometrischen Problems erhoben, das bereits mehrfach untersucht wurde (Rott, 2014, S.144264; Schoenfeld, 1985, S. 77). In Tabelle 2 ist die Problemstellung gegeben, die auch den Lernenden vorgelegt wurde.

Das drehende Quadrat	
<p>Gegeben sind zwei flächengleiche Quadrate. Dabei sind die beiden Quadrate so übereinander geschoben, dass der Eckpunkt des orangen Quadrats mit dem Mittelpunkt des roten Quadrats übereinstimmt. Untersuche die Größe der Fläche, die von beiden Quadraten überdeckt wird.</p> <p>Begründe deine Entdeckungen!</p>	

TAB. 2 Problemstellung (nach Rott, 2014a, S. 264)

Zusätzlich bekamen die Teilnehmenden ein Dokumentationsblatt, wo sie ihre Erkenntnisse sammeln konnten. Dies ist in Abbildung 2 ersichtlich.

<p>Hier kannst du Notizen machen:</p> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>	<p>Hier kannst du Skizzen machen:</p> 
--	--

ABB. 2 Dokumentationsblatt (Kinzl, 2025, S. 45)

Für das Lösen der Problemstellung sind folgende zwei Erkenntnisse notwendig: Die erste wichtige Erkenntnis ist, dass der überlappende Flächeninhalt ein Viertel des roten beziehungsweise orangen Quadrats ist. Diese Erkenntnis kann durch das Betrachten von Spezialfällen in Kombination mit dem systematischen Ausprobieren und Zerlegen, wie in Abbildung 3 dargestellt, erlangt werden.

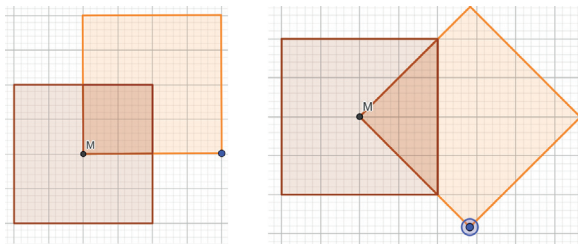
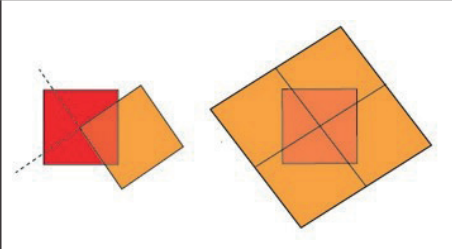
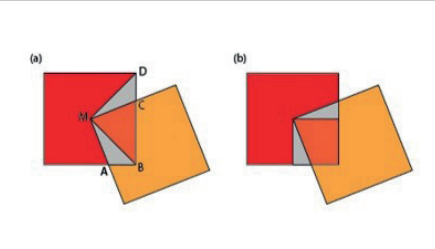


ABB. 3 Spezialfälle (Kinzl, 2025, S. 54)

Die zweite wichtige Erkenntnis ist, dass der überlappende Flächeninhalt immer gleich groß ist, unabhängig von der Lage des orangen Quadrats. Mathematisch kann dies über kongruente Vierecke oder über kongruente Dreiecke begründet werden. Eine Veranschaulichung dieser Begründungen ist in Tabelle 3 dargestellt.

Begründung über kongruente Vierecke	Begründung über kongruente Dreiecke
	

TAB. 3 Begründungen (nach Rott, 2013, S. 139)

Die Problemstellung wird in ein haptisches und ein digitales Setting eingebettet. Im haptischen Setting arbeiten die Lernenden mit einem roten und einem orangen Quadrat aus Papier. Zusätzlich bekommen die Lernenden in beiden Settings drei Hilfestellungen. So wird ein differenziertes Lernsetting angeboten. Im haptischen Setting liegen drei Briefumschläge mit Hilfestellungen bereit, die selbständig genutzt werden können: In Hilfestellung 1 wird der Mittelpunkt des roten Quadrats eingezeichnet, in Hilfestellung 2 wird der orange Eckpunkt auf dem roten Mittelpunkt fixiert und in Hilfestellung 3 werden Diagonalen sowie ein zusätzliches Raster eingezeichnet. Eine Veranschaulichung der haptischen Materialien ist in Abbildung 4 zu sehen. Links befindet sich das Ausgangsmaterial und dann von links nach rechts Hilfestellung 1 bis 3.

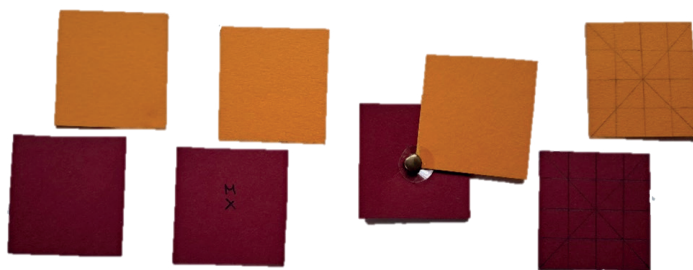


ABB. 4 Haptisches Material (Kinzl, 2025, S. 51)

Im digitalen Setting wird das Problem in einem GeoGebra-Applet dargestellt, das dieselbe Konstellation der Quadrate abbildet. Auch hier stehen dieselben Hilfestellungen zur Verfügung, die über Kontrollkästchen eingeblendet werden können. Mit der ersten Hilfestellung wird der Mittelpunkt eingeblendet, dann wird

der Eckpunkt des orangenen Quadrats am Mittelpunkt des roten Quadrats fixiert und am Ende wird ein Raster eingeblendet. Eine Veranschaulichung ist in Abbildung 5 zu sehen.

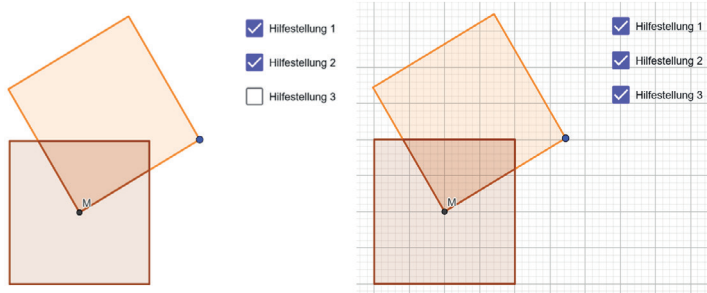


ABB. 5 Digitales Material (Kinzl, 2025, S. 53)

3.1.4 Datenauswertung

Die Datenauswertung erfolgte anhand des Protokollanalyseverfahrens nach Schoenfeld. Dazu wurde der gesamte Problembearbeitungsprozess videografiert, transkribiert (hierbei wurde die Sprache der Lernenden nicht geglättet) und dann in Episoden unterteilt (Schoenfeld, 1985, Kapitel 9). Die Kodierung erfolgt zunächst deduktiv anhand der Episoden Lesen, Analyse, Exploration, Planung, Implementierung, Verifikation, Abschweifung, Schreiben, Organisation und Übergänge (Rott, 2013). Eine genaue Beschreibung der Episoden ist im Kodierhandbuch von Rott (2014, A6–A23) bzw. in der Masterarbeit Kinzl (2025, S. 56–58) nachzulesen. In einem zweiten Analyseverlauf werden die Problembearbeitungsprozesse induktiv ausgewertet, um die Kodierung zu überprüfen und zu präzisieren. Zusätzlich wird die Episode *Hinweis nehmen* eingeführt, welche die Entscheidung zur Nutzung sowie die tatsächliche Verwendung von Hilfestellungen umfasst (Kinzl, 2025, S. 57). Die Phasen wurden nur dann einer Gruppe gemeinsam zugeordnet, wenn sich beide Personen tatsächlich in derselben Phase befanden. Andernfalls erfolgte die Kodierung personenbezogen, sodass die Phasen für jede Person getrennt erfasst wurden.

Zusätzlich wurde, neben der Erstellung der Protokolle, anhand der Episodeneinteilung deduktiv untersucht, welche Heuristiken zum Einsatz kamen. Dazu wurden die von Rott (2013, S. 322–328) untersuchten Heuristiken herangezogen. Diese sind: Informative Figur, Hilfselemente, Messen, Spezialfall, Zerlegungsprinzip, Rückführungsprinzip, Transformationsprinzip, Symmetrieprinzip, Ähnliche Aufgabe. Die Verwendung der Hilfestellungen sowie die Hürden im Prozessverlauf wurden exploratorisch und induktiv untersucht. Dazu wurde für jede Zweiergruppe neben einem Transkriptionsprotokoll auch ein Protokoll über die Anzahl der in Anspruch genommenen Hilfestellungen sowie den Heuristikeinsatz geführt.

Außerdem wurden die Problembearbeitungsprozesse bewertet. Ein Prozess gilt als erfolgreich, wenn die Lernenden erfasst haben, dass der Flächeninhalt immer ein Viertel ist und zusätzlich eine Begründung über kongruente Dreiecke oder Vierecke abgegeben haben (Kinzl, 2025, S. 56).

3.2 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse anhand der Kategorien Art und Anzahl der Phasen, Linearität, Verwendung der Hilfestellungen, Hürden im Prozessverlauf sowie der Heuristikeinsatz präsentiert. Exemplarisch werden zu Beginn des Kapitels beide Begründungsformate, also jene über das kongruente Viereck und Dreieck, präsentiert. So hat eine Gruppe eine Skizze, die in Abbildung 6 zu sehen ist, angefertigt und folgende Begründungen über kongruente Dreiecke hinzugefügt:

„Doch, es geht. Weil wenn du hier dieses Dreieck abschneidest (...) und hier dranhängst, dann entsteht ein Viertel, wie wir es gewöhnt sind.“ (Kinzl, 2025, Di_16).

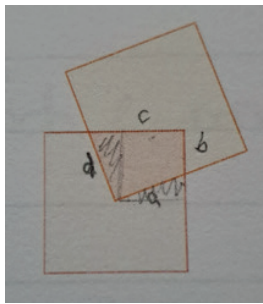


ABB. 6 Begründungen über kongruente Dreiecke (Kinzl, 2025, S. 71)

Begründungen über kongruente Vierecke sind in folgenden zwei Lernendenaussagen zu finden.

07_P1: „Das ist ein rechter Winkel, also sind es 25 %. [da 90° ein Viertel von 360° sind]“ (Kinzl, 2025, Ha_07)

16_03: „Aber es hat ja immer 90° . Also muss es ein Viertel sein.“ (Kinzl, 2025, Di_16)

3.2.1 Art und Anzahl der Phasen (Kinzl, 2025, S. 59–64)

Die Prozesse zeigen sich insgesamt als stark individuell: Zwar beginnen alle Bearbeitungsprozesse mit dem Lesen der Aufgabenstellung und die meisten (14 von 16) enden mit der Verifikation oder mit dem Schreiben. Die Reihenfolge der Phasen variiert allerdings stark. Die Analysephase tritt häufig nach dem Lesen oder nach dem Öffnen eines Hinweises auf. Die Exploration kommt sehr oft nach der Analyse-

phase. Sie tritt deutlich öfter im digitalen Setting auf (insgesamt 32 Phasen) als im haptischen (insgesamt 17 Phasen). Die Phasen der Planung und Implementierung finden sich vor allem im haptischen Setting und stehen häufig in Verbindung mit der Heuristik des Messens. Außerdem tritt in über der Hälfte der Gruppen (9 von 16) mindestens eine Verifikationsphase auf. Insbesondere die digital agierenden Gruppen nutzen Verifikationsphasen häufiger, oft am Ende des Prozesses.

Folgende zwei Problembearbeitungsprozesse sollen zeigen, wie individuell die Problembearbeitungsprozesse ablaufen. In Abbildung 7 zeigt sich ein Prozess mit nur wenigen, dafür länger dauernden Phasen, wie etwa der Schreibphase (Phase 4). In Abbildung 8 gibt es mehrere, dafür deutlich kurze Phasen.

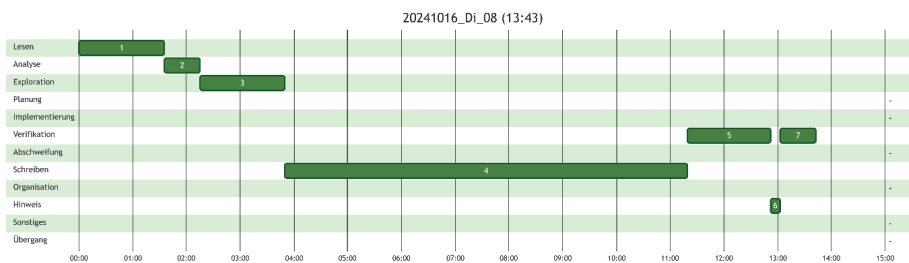


ABB. 7 Geringe Phasenanzahl (Di_08) (Kinzl, 2025, S. 60)

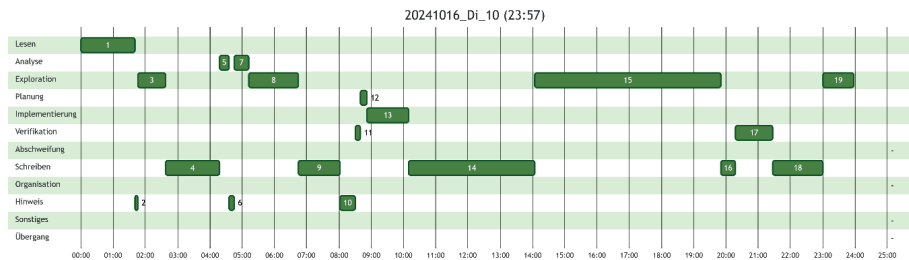


ABB. 8 Hohe Phasenanzahl (Di_10) (Kinzl, 2025, S. 60)

Interpretation

Die digital agierenden Gruppen zeigen häufigere Verifikationsphasen. Zudem deutet sich ein Zusammenhang zwischen Verifikation und erfolgreicher Problemlösung an, da 7 der 9 Prozesse mit Verifikationsphase als erfolgreich bewertet wurden. Es kann daher geschlussfolgert werden, dass Verifikationen sich positiv auf den Problemlösungserfolg auswirken. Planungs- und Implementierungsphasen treten hingegen vorwiegend im haptischen Setting auf und umfassen meist Messhandlungen sowie deren Umsetzung. Dies könnte darauf zurückzuführen sein,

dass Messungen im digitalen Setting aufgrund fehlender entsprechender Werkzeuge im Applet erschwert sind (Kinzl, 2025, S. 64).

3.2.2 Linearität (Kinzl, 2025, S. 65–66)

Die vorliegende Untersuchung kommt zu dem Ergebnis, dass 12 der 16 Problembearbeitungsprozesse nicht linear sind. Abbildung 9 zeigt exemplarisch einen nicht linearen Prozess.

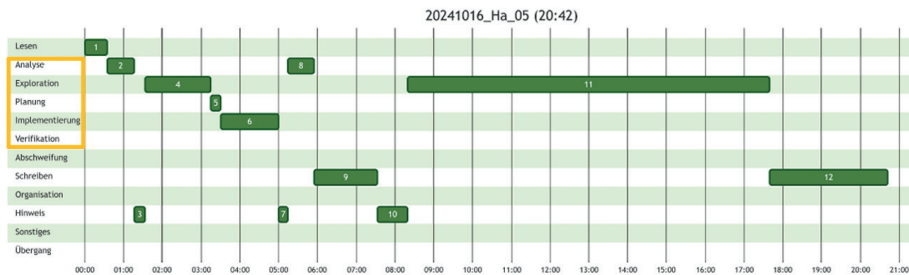


ABB. 9 Nicht-lineare Problembearbeitung (Ha_05) (Kinzl, 2025, S. 154)

Da hier die Phasen nicht von oben nach unten durchlaufen werden, sondern wie zum Beispiel in Phase 8 nach einer Implementierung wieder zurück in eine Analysephase gegangen wird, handelt es sich um einen nicht-linearen Verlauf. Im haptischen Setting tritt häufiger eine Nichtlinearität auf. So sind 7 der 8 haptischen Prozesse nicht linear, während im digitalen Setting 5 der 8 Prozesse nicht linear sind.

Interpretation

Die häufigere Nichtlinearität im haptischen Setting könnte darauf zurückzuführen sein, dass die Lernenden im haptischen Setting freier mit den Materialien interagieren können, während das digitale Applet die Handlungsmöglichkeiten stärker strukturiert.

3.2.3 Einsatz der Hilfestellungen (Kinzl, 2025, S. 70–75)

Der Zeitpunkt der Hinweisnutzung variiert stark zwischen den Gruppen und zeigt keine klaren Muster. Die Hilfestellungen werden immer in der vorgegebenen Reihenfolge verwendet, jedoch zu sehr unterschiedlichen Zeitpunkten und in unterschiedlichen Abständen. Nach dem Nutzen eines Hinweises wird oftmals in eine Analyse- oder Explorationsphase zurückgekehrt. Eine Gruppe (Di_13) nimmt keine Hilfestellungen in Anspruch, weil sie vermutet, dass der Einsatz von Hinweisen Minuspunkte bringen könnte. Manche Gruppen suchen zudem nach zusätzlichen Hilfsmitteln in ihrer Federschachtel.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Gruppen ergibt sich in der Anzahl der verwendeten Hilfestellungen. Im digitalen Setting werden 21 Hilfestellungen in Anspruch genommen, im haptischen Setting nur 15.

Hilfestellungen dienen zur Verifikation eigener Vermutungen. Folgendes Gespräch ließ sich beobachten, nachdem die Lernenden H1 (= Hilfestellung 1) verwendet haben:

14_P1: „Perfekt. Das ist der Mittelpunkt. Das haben wir schon herausgefunden. Bombastisch.“, und 14_P2: „Das ist gut, weil das zeigt uns, dass wir richtig sind.“ (Kinzl, 2025, Di_14)

Außerdem wurden die Hilfestellungen auch genutzt, um Fehler frühzeitig zu erkennen:

14_P1: „Oder wir nehmen jetzt einen Hinweis und wenn das, was wir schon gesagt haben, da schon falsch ist, dann ist es besser, wir machen es jetzt, als erst in fünf Minuten.“ (Kinzl, 2025, Di_14)

Interpretation

Es lässt sich vermuten, dass der häufigere Einsatz der Hilfestellung im digitalen Setting darauf zurückzuführen ist, dass der Zugang zu den Hilfestellungen im Applet leichter ist als bei den haptisch agierenden Gruppen. Die digitale Lernumgebung lädt nicht nur zur Nutzung von mehr Hilfestellungen ein, sondern auch zu deren spontaner Anwendung.

3.2.4 Hürden im Prozessverlauf (Kinzl, 2025, S. 70–75)

Die im Problembearbeitungsprozess auftretenden Hürden lassen sich in drei Kategorien gliedern: allgemeine Hürden, Hürden im haptischen Setting und Hürden im digitalen Setting. Eine allgemeine Hürde ist das Formulieren einer Begründung, so antwortet eine Person auf die Frage, was denn nun zu tun sei, wie folgt:

12_P2: „Ich glaube, dass wir hier nicht rechnen müssen, sondern, dass das so ein ‚Hirndings‘ ist.“ (Kinzl, 2025, Di_12)

Auch das Wort „untersuchen“ sorgt bei manchen Gruppen für Diskussionen. So versteht eine Person unter „untersuchen“:

„Ja, einfach ein bisschen herumtun.“ (Kinzl, 2025, Di_10)

Zudem fiel es schwer, den überlappenden Flächeninhalt mit den großen Quadraten in Beziehung zu setzen. So wurde zwar der Flächeninhalt der überlappenden Figur bestimmt, dieser dann aber nicht in Relation zum roten Quadrat gesetzt. Auch Gruppe Di_14 stellte sich die Frage, ob es notwendig sei, den überlappenden Flächeninhalt im Zusammenhang mit dem großen Quadrat zu berücksichtigen, wie das folgende Zitat zeigt:

14_P2: „Wir können es in cm oder so rechnen.“ 14_P1: „Das ist ein Viertel. (..) Also ein Viertel vom Roten wird überdeckt. (4sec) Also in Bruch könnten wir es schon aufschreiben.“ (Kinzl, 2025, Di_14)

Im haptischen Setting treten vermehrt Defizite beim Vorwissen zum Flächeninhalt auf, inklusive Verwechslungen mit dem Umfang. Häufig versuchen diese Gruppen, eine Formel für die Berechnung zu entwickeln, die dann aber fehlerhaft ist.

Zudem fällt es den Teams im haptischen Setting schwer, die dynamische Drehbewegung des Problems zu erkennen. So betrachtet etwa die Gruppe Ha_04 lediglich die Angabeskizze als Ausgangspunkt und legt keine weiteren Fälle.

Im digitalen Setting stehen hingegen technische Herausforderungen im Vordergrund. Schwierigkeiten bei der korrekten Positionierung des Eckpunkts und beim Auffinden des Mittelpunkts sind beispielsweise eine Herausforderung für die Gruppe Di_06:

16_P2: „Ja, aber wir müssen einen anderen Eckpunkt nehmen. Der blaue Punkt ist zum Drehen. Der darf nicht im Mittelpunkt sein“, und schiebt einen anderen orangen Eckpunkt auf den roten Mittelpunkt. 16_P3: „Aber der blaue Punkt muss ja im Mittelpunkt sein“, 16_P2: „Nein, der ist zum Drehen da.“ 16_P3: „Stimmt, das sind ja alles Eckpunkte des orangen Quadrats.“ (Kinzl, 2025, Di_16)

Eine weitere Herausforderung im digitalen Setting ist die Nutzung von Hilfestellung 2, da diese für Gruppen, die den richtigen Ansatz bereits verfolgen, zunächst keinen erkennbaren Mehrwert bietet. Erst durch weiteres Ausprobieren erkennen die Lernenden den Zweck des Hinweises und bestätigen damit, dass sie auf dem richtigen Lösungsweg sind. Auch das exakte Auffinden des Mittelpunktes ist im Vergleich zum haptischen Setting, wo lediglich die zwei Diagonalen eingezeichnet werden müssen, eine Hürde. Ein weiterer Faktor, der in der digital arbeitenden Gruppe zu Verwirrung führt, ist die Möglichkeit, das orange Quadrat zu verschieben, obwohl dies für die Problemlösung nicht notwendig ist. Die Lernenden rätseln über den Sinn dieser Funktion, obwohl sie das Problem bereits korrekt gelöst hatten. Dies soll folgendes Zitat veranschaulichen:

14_P2: „Was bringt es uns eigentlich, dass wir das Orange verschieben können? (..) Irgendeinen Sinn muss das auch haben, aber welchen?“ 14_P1: „Ja, das wird nicht ohne Grund da sein.“ (Kinzl, 2025, Di_14)

Insgesamt lässt sich sagen, dass die digital agierende Gruppe eine bessere Leistung zeigt, da doppelt so viele Lernende dieser Gruppe einen korrekten Ansatz ausführen wie in der haptisch agierenden Gruppe. Gleichzeitig weist die haptisch agierende Gruppe einen höheren Anteil an Personen auf, die keinen Ansatz finden.

Interpretation

Die erfolgreichere Umsetzung im digitalen Setting deutet darauf hin, dass digitale Lernmaterialien möglicherweise effektiver dabei helfen, das gestellte Problem erfolgreich zu lösen.

3.2.5 Heurismeneinsatz (Kinzl, 2025, S. 76–80)

Vergleicht man das haptische und das digitale Setting, so werden im haptischen Setting insgesamt mehr Heurismen eingesetzt. Im Folgenden werden die einzelnen Heurismen und deren Anwendung zusammengefasst.

Informative Figuren

Alle haptischen und alle digitalen Gruppen nutzen Skizzen, sogenannte informative Figuren. Die Skizzen dienen zur Darstellung des allgemeinen Falls (Abbildung 10 links), der Spezialfälle (Abbildung 10 zweites und drittes Bild) und auch zur Begründung (Abbildung 10 rechts).

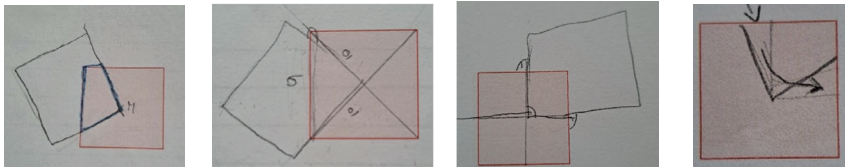


ABB. 10 Skizzen (Di 10, Di 11, Di 12) (Kinzl, 2025, S. 77)

Hilfselemente

Hilfselemente, wie etwa das Einzeichnen von Diagonalen (siehe Abbildung 8 zweites Bild von links) oder von Senkrechten (siehe Abbildung 8 drittes Bild von links), werden von der Mehrheit der Gruppen genutzt. Sie werden verwendet, um Spezialfälle einzuzeichnen, die Figuren in kleinere Teilflächen zu zerlegen, aber auch um zusätzliche Maße in der Skizze einzuzeichnen. Im haptischen Setting werden die Hilfselemente zusätzlich direkt auf den Materialien eingezeichnet. Dies war im digitalen Setting nicht möglich.

Spezialfälle

Wie in Abbildung 10 ersichtlich, können bei der Problemstellung zwei Spezialfälle identifiziert werden. Spezialfall 1 ist dort im dritten Bild von links dargestellt, Spezialfall 2 im zweiten Bild von links. Beide vereinfachen die Darstellung und machen deutlich, dass der überlappende Flächeninhalt einem Viertel entspricht. Insgesamt kann gesagt werden, dass beinahe alle Gruppen Spezialfall 1 erkennen. Spezialfall 2 wird häufiger im digitalen Setting erkannt, wodurch insgesamt mehr Spezialfälle im digitalen Setting untersucht wurden.

Zerlegungs- und Rückführungsprinzip

Das Zerlegungs- und Rückführungsprinzip, also das Zerlegen einer Figur in Teile und das Zurückführen dieser in eine bekannte Figur, wird von etwa der Hälfte der Gruppen angewandt. Die beiden Heuristiken werden meist in Kombination verwendet, indem ein allgemeines Viereck zunächst zerlegt und dann in bekannte Figuren zurückgeführt wird. Dies dient häufig als Grundlage für Begründungen mittels kongruenter Dreiecke. Eine Veranschaulichung ist in Abbildung 10 rechts zu sehen.

Eine besondere Herangehensweise zeigt die Gruppe Ha_03, die in der Verifikationsphase das Zerlegungs- und Rückführungsprinzip anwendet, um den Flächeninhalt zu bestimmen. Dabei wird die überlappende Fläche direkt am Material in kleine Dreiecke und Rechtecke zerlegt und auf bereits bekannte, berechenbare Figuren zurückgeführt, sodass der Flächeninhalt approximativ bestimmt wird. Eine Veranschaulichung dieses Vorgehens ist in Abbildung 11 zu sehen.

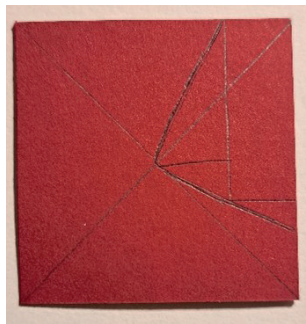


ABB. 11 Zerlegungs- und Rückführungsprinzip (Ha_03) (Kinzl, 2025, S. 79)

Charakteristika des haptischen Settings: Messen und Transformationsprinzip

Zwei charakteristische Heuristiken für das haptische Setting sind der Einsatz des Messens und des Transformationsprinzips, da diese im digitalen Setting nicht durchgeführt werden können. Das Messen mit Hilfe eines Lineals wird von allen haptisch agierenden Gruppen genutzt, hingegen nur von drei digital agierenden Gruppen. Für die digital agierenden Gruppen scheint das Messen mit Lineal am

Tablet etwas ungewohnt. Der Heurismus des Messens führt eher zu langen Rechnungen, weil die Lernenden falsche Formeln verwenden oder sich verrechnen.

Das Transformationsprinzip, also das Überführen des Problems in ein anderes Modell, wird insgesamt nur einmal angewendet, nämlich von einer haptisch agierenden Gruppe. Dabei wird ein Quadrat zerschnitten und so das allgemeine Viereck in ein Quadrat zurückgeführt. Das Zerschneiden ist so im digitalen Setting nicht möglich und daher eine Besonderheit des haptischen Settings. Das Ergebnis ist in Abbildung 12 zu sehen.

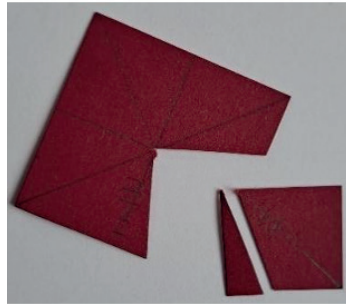


ABB. 12 Transformationsprinzip (Ha_17) (Kinzl, 2025, S. 80)

Interpretation

Fast alle haptisch arbeitenden Gruppen nutzen das Messen, während dieser Heurismus bei den digital arbeitenden Gruppen nur selten vorkommt. Dies könnte daran liegen, dass der digitale Umgang mit Geodreiecken ungewohnt ist. Im digitalen Setting werden hingegen häufiger Spezialfälle erkannt, vermutlich durch die dynamische Nutzung des Applets. Das Transformationsprinzip wird nur bei einer der haptisch arbeitenden Gruppen angewendet, da physische Materialmanipulationen digital nicht möglich sind.

4. Fazit

Die Untersuchung verdeutlicht, dass mathematische Problembearbeitungsprozesse sehr unterschiedlich verlaufen und nur selten einer linearen Abfolge folgen. 12 der 16 Prozesse zeigen nichtlineare Strukturen, was maßgeblich auf den Einsatz von Hilfestellungen zurückzuführen ist. Hinweise führen häufig zu einer Rückkehr in die Analyse- oder Explorationsphase und damit zu einem erneuten Durchlaufen einzelner Phasen. Gleichzeitig erweisen sich Hilfestellungen als förderlich für den Problemlöseerfolg, da sie vermehrt Verifikationsphasen anregen. Besonders im digitalen Setting werden Hinweise häufiger genutzt, was vermutlich auf den niederschweligen Zugang zu Kontrollkästchen zurückzuführen ist. Dies hat zur Folge, dass im digitalen Setting die Gruppen erfolgreicher im Hinblick auf das Lösen des Problems sind.

Die identifizierten Hürden sind überwiegend problemspezifisch und lassen sich nicht ohne Weiteres auf andere Problemstellungen übertragen. Unterschiede zwischen den Settings zeigen sich insbesondere im Heuristikeinsatz: Im haptischen Setting werden mehr Heuristiken genutzt, darunter auch Strategien wie Messen und das Transformationsprinzip, die zwar nicht immer zielführend, jedoch für die Entwicklung heuristischer Kompetenz bedeutsam sind (Rott, 2013, Kapitel 6; Schoenfeld, 1985, S. 72–75).

Insgesamt wird deutlich, dass sowohl haptische als auch digitale Medien wertvolle Zugänge zum mathematischen Problemlösen eröffnen. Beide Settings erweisen sich als geeignet, wenn auch mit unterschiedlichen Stärken: Digitale Medien unterstützen durch ihre Struktur den Problemlöseerfolg, während haptische Materialien reichhaltige Möglichkeiten für den Einsatz von Heuristiken bieten.

Die Aussagekraft der Studie ist aus mehreren Gründen limitiert: Erstens basiert die Untersuchung auf einer Positivauswahl des Samples, da die Teilnahme freiwillig erfolgte. Zweitens wurde die Problembearbeitung in Zweier- bzw. Dreiergruppen durchgeführt, was zwar den Austausch fördert, jedoch keine Rückschlüsse auf individuelle Denkprozesse zulässt. Drittens basiert die Untersuchung nur auf einer einzigen Problemstellung, sodass die Ergebnisse nur eingeschränkt auf andere Probleme übertragbar sind. Viertens wurde die Kodierung lediglich von einer Person durchgeführt (Kinzl, 2025, S. 85–86).

Obwohl schon über Jahrzehnte hinweg intensiv beforscht, bleibt Problembearbeitung noch immer ein Gebiet der Mathematikdidaktik, in dem es viel zu erforschen gibt und aus dem viele wichtige Erkenntnisse für den Mathematikunterricht gezogen werden können (Kinzl, 2025, S. 86).

Literaturverzeichnis

- BIFIE (2013). *Themenheft Mathematik „Problemlösen“ Volksschule Grundstufe I + II*. Graz: Leykam. Verfügbar unter: <https://www.iqs.gv.at/downloads/nationale-kompetenzerhebung/materialien-zu-ikm-und-bildungsstandards/publikationen-mathematik>
- Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht* (Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik). Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Büchter, A. & Leuders, T. (2020). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern – Leistung überprüfen* (9. Aufl.). Cornelsen.
- Cabrera, D. & Colosi, L. (2010). The World at Our Fingertips. *Scientific American Mind*, 21(4), 36–41. <https://doi.org/10.1038/scientificamericanmind0910-36>
- Chi, M. T.H. (2006). Two Approaches to the Study of Expert's Characteristics. In K. A. Ericsson, N. Charness, P. J. Feltovic & R. R. Hoffman (Hrsg.), *The Cambridge Handbook of Expertise and Expert Performance* (S. 21–30). Cambridge: Cambridge University Press.

- Crandall, R. & Karadoğan, E. (2021). Designing Pedagogically Effective Haptic Systems for Learning: A Review. *Applied Sciences*, 11(6245), 1–29. <https://doi.org/10.3390/app11146245>
- Holzäpfel, L., Lacher, M., Leuders, T. & Rott, B. (2018). *Problemlösen lehren lernen. Wege zum mathematischen Denken*. Seelze: Klett Kallmeyer.
- Hussy, W. (1984). *Denkpsychologie: Ein Lehrbuch. Band 1. Geschichte, Begriffs- und Problemlöseforschung, Intelligenz*. Stuttgart: Kohlhammer.
- Jacinto, H. & Carreira, S. (2023). Knowledge for teaching mathematical problem-solving with technology: An exploratory study of a mathematics teacher's proficiency. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 11(1), 105–122. <https://doi.org/10.30935/scimath/12464>
- Kinzl, A. (2025). *Differenzierte mathematische Problembearbeitungsprozesse in der 7. Schulstufe. Ein Vergleich von haptischen und digitalen Lernmedien*. Masterarbeit. Johannes Kepler Universität, Linz.
- Kipman, U. (2020). *Komplexes Problemlösen. Begriff – Einflussgrößen – Korrelate – Erkenntnisse am Beispiel der PISA-Studie*. Wiesbaden: Springer Gabler. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-30826-1>
- OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework. Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy (PISA)*. Paris: OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264190511-en>
- Pädagogik-Paket (2026). <https://www.paedagogikpaket.at/massnahmen/lehrlaene-neu.html>
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Reinhold, F., Walter, D. & Weigand, H.-G. (2023). Digitale Medien. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Auflage, S. 523–560). Berlin: Springer Spektrum.
- Rott, B. (2012). *Heurismen in den Problembearbeitungsprozessen von Fünftklässlern*. Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. <http://dx.doi.org/10.17877/DE290R-16019>
- Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen – Ergebnisse einer empirischen Studie*. Dissertation. Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, Hannover.
- Rott, B. (2014). Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern – Entwicklung eines deskriptiven Phasenmodells. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 35(2), 251–282. <https://doi.org/10.1007/s13138-014-0069-2>
- Rott, B. (2020). Teachers' behaviors, epistemological beliefs, and their interplay in lessons on the topic of problem solving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(5), 903–924. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09993-0>
- Rott, B., Bruder, R., Heinrich, F. & Bauer, C. (2023). Problemlösen lernen. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Auflage, S. 313–340). Berlin: Springer Spektrum.

- Schoenfeld, A.H. (1983). The wild, wild, wild, wild, wild world of problem solving: A review of sorts. *For the Learning of Mathematics*, 3(3), 40–47.
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Florida: Academic Press.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically. Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 334–370). New York: MacMillan.
- Stiller, D., Krichel, K. & Schwarz, W. (2021). *Heuristik im Mathematikunterricht: Bedeutung des Problemlösens in der Geschichte und seine didaktische Funktion für die Zukunft*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Tamam, B. & Dasari, D. (2021). The use of Geogebra software in teaching mathematics. *Journal of Physics: Conference Series*, 1882(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1882/1/012042>
- Vollrath, H.J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, 2. Aufl. 2012). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Weinert, F.E. (2001). Vergleichende Leistungsmessungen in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F.E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 17–31). Weinheim und Basel: Beltz.